

ВЕСОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ТРЕХМЕРНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ РАНГА 2

Иван Евгеньевич Светов¹
Анна Петровна Полякова²

^{1,2}Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,

^{1,2}Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия

¹svetovie@math.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8113-5502>

²apolyakova@math.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8725-0974>

*В память о выдающемся ученом и добром друге,
профессоре А.К. Луисе.*

Аннотация

В работе исследуются свойства весовых преобразований Радона симметричных 2-тензорных полей в $\mathbb{R}^3$. Установлены связи весовых преобразований Радона тензорных полей ранга 2 и преобразования Радона их потенциалов. Эти связи дают описание ядер и образов томографических интегральных операторов, действующих на тензорные поля. Рассмотрены варианты постановок задач восстановления симметричных 2-тензорных полей по значениям совместно заданных нормального, продольных и весовых преобразований Радона, получены формулы обращения.

Ключевые слова и фразы

Тензорная томография, разложение тензорного поля, обобщенное преобразование Радона, весовое преобразование Радона, формула обращения.

Источник финансирования

Работа осуществлена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-00200)

Для цитирования

Светов И. Е., Полякова А. П. Весовые преобразования Радона трёхмерных симметричных тензорных полей ранга 2 // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 4, С. 132-157. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-4-132-157

Weighted Radon transforms of three-dimensional symmetric tensor fields of rank 2

Ivan E. Svetov¹, Anna P. Polyakova²,

^{1,2}Sobolev Institute of Mathematics, ^{1,2}Novosibirsk State University,
Novosibirsk, Russia

¹svetovie@math.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8113-5502>

²apolyakova@math.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8725-0974>

Abstract

The paper investigates the properties of weighted Radon transforms of symmetric 2-tensor fields in $\mathbb{R}^3$. The relationships between the weighted Radon transforms of tensor fields of rank 2 and the Radon transform of their potentials are established. These connections provide a description of kernels and images of tomographic integral operators acting on tensor fields. Variants of problem statements for the reconstruction of symmetric 2-tensor fields from the values of jointly defined normal, longitudinal and weighted Radon transforms are considered, inversion formulas are obtained.

Keywords

Tensor tomography, decomposition of tensor field, generalized Radon transform, weighted Radon transform, inversion formula.

Funding

The work was financially supported by the Russian Science Foundation (RSF), project No. 24-21-00200

For citation

Svetov I. E., Polyakova A. P., Weighted Radon transforms of three-dimensional symmetric tensor fields of rank 2 // *Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N. 4, P. 132-157. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-4-132-157

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2025, Том 28, № 4, С. 132-157

Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 4, P. 132-157

Введение

Хорошо известна (см., например, [1, 2, 3]) задача компьютерной томографии, заключающаяся в реконструкции неизвестной функции по семействам её интегралов вдоль прямых (лучевые преобразования) или по плоскостям (преобразование Радона). Методы её решения многочисленны и включают как точные формулы обращения, так и различные численные алгоритмы. Значительное число исследований посвящено задачам тензорной томографии, в которых требуется по известным значениям лучевых преобразований реконструировать тензорное поле или его часть. Наиболее известна постановка, в которой необходимо определить соленоидальную часть векторного или симметричного тензорного поля по его продольному лучевому преобразованию [4, 5, 6]. Для полного восстановления поля необходимы дополнительные данные. Например, можно рассмотреть поперечные и смешанные лучевые преобразования. Эти операторы исследовались в двумерном пространстве [7, 8] и пространстве произвольной размерности [9]. Другая возможность — использовать лучевые преобразования моментов (лучевые преобразования с весом) векторных и тензорных полей. Лучевым преобразованиям моментов в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^n$ посвящено много работ, в которых наряду с теоретическим исследованием [10, 11, 12, 13], предложены формулы или процедуры обращения [10, 11, 13, 14, 15]. В работах [16, 17, 18] численно реализованы алгоритмы восстановления 2D векторных и тензорных полей по лучевым преобразованиям их моментов. В то время как задаче восстановления 3D векторных и тензорных полей по обобщенным преобразованиям Радона (весовым и безвесовым) посвящено значительно меньше работ.

Предметом исследования, в рамках настоящей статьи, являются обобщенные преобразования Радона (нормальное, продольные и весовые), подынтегральные выражения в определениях которых представляют собой линейные комбинации произведений компонент 3D симметричного 2-тензорного поля и компонент нормального вектора и (или) компонент векторов компланарных плоскости интегрирования. Точные определения интегральных операторов приведены в Разделе 1.

В работе Принса [19] изучались зондирующие измерения (согласно терминологии настоящей статьи, это нормальное и продольные преобразования Радона), действующие на векторные поля в $\mathbb{R}^3$. Позднее было показано, как эти измерения можно получить с помощью магнитно-резонансного сканера [20]. Принс показал в [19, 20], что для реконструкции потенциальной части векторного поля требуется только один набор зондирующих измерений (нормальное преобразование Радона), а для реконструкции соленоидальной части требуются два набора измерений (продольные преобразования Радона).

Исследование Принса определило принципы, на основе которых были разработаны методы измерения проекций тензоров диффузии с помощью магнитно-резонансной томографии (МРТ). В частности, в работах [21, 22] был предложен метод диффузионно-тензорной томографии. С помощью этого метода тензорные поля восстанавливаются по измерениям проекций (так называемых направленных преобразований Радона) тензорных полей. В работе [23] был разработан подход к восстановлению главных направлений диффузионного тензорного поля непосредственно из данных МРТ. Интерес представляют и недавние работы [24, 25], посвященные обращению нормального, продольных и смешанных преобразований Радона 3D тензорных полей.

Еще одна возможность для полного восстановления векторного поля — совместное рассмотрение весовых и безвесовых преобразований Радона. В работах [26, 27] предложен подход к восстановлению трехмерного векторного поля, использующий в качестве исходной информации совместные измерения электромагнитных и акустических сигналов (магнитно-акусто-электрическая томография). Математической моделью таких измерений служат продольные и весовые преобразования Радона. В [28] было установлено, что для решения задачи необходимы значения всех продольных и одного весового преобразования Радона, и предложен алгоритм полного восстановления векторного поля в $\mathbb{R}^n$. Для восстановления потенциальной части векторного поля необходимо опираться на результат предварительного восстановления соленоидальной части рассматриваемого векторного поля. В работе [29] предложен другой подход, позволяющий восстанавливать независимо каждую из частей 3D векторного поля.

В настоящей работе исследуются весовые преобразования Радона симметричных 2-тензорных полей в $\mathbb{R}^3$. Обобщенные преобразования Радона 3D тензорных полей обладают нетривиальными ядрами, что существенно осложняет решение задач тензорной томографии. Важную роль в исследовании играет детальное разложение симметричных тензорных полей ранга 2, полученное в [24]. Как следствие, рассматривается задача полного восстановления трехмерного симметричного 2-тензорного поля по совместно заданным значениям нормального, продольных и весовых преобразований Радона. В разделе 1 приводятся необходимые предварительные сведения о дифференциальных и томографических интегральных операторах, а также разложения тензорных полей. Раздел 2 посвящен изучению свойств весовых преобразований Радона 3D симметричных 2-тензорных полей. В разделе 3 сформулированы варианты постановок задач тензорной томографии и получены формулы обращения для их решения. Заключение содержит краткое резюме основных результатов работы и выводы.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть $x = (x, y, z)$ — точка в пространстве $\mathbb{R}^3$. Там, где это будет удобно, для координат точки будем использовать еще одно стандартное обозначение: $x = (x_1, x_2, x_3)$. Через $T^m(\mathbb{R}^3)$ мы обозначаем множество всех трехмерных тензорных полей ранга m . Если $m = 0$, то мы рассматриваем скалярные поля (функции). Мы рассматриваем векторные поля, если $m = 1$, и m -тензорные поля, если $m \geq 2$. Некоторые определения будут даны для произвольного m , но в статье мы будем использовать только $m = 0, 1, 2$. Обозначим через $S^m(\mathbb{R}^3)$ подмножество множества $T^m(\mathbb{R}^3)$, состоящее из симметричных тензорных полей ранга m , т.е. полей, инвариантных относительно любых перестановок индексов. Ясно, что $S^m(\mathbb{R}^3)$ совпадает с $T^m(\mathbb{R}^3)$ при $m = 0, 1$.

Мы используем обозначения $\mathbf{v}(x)$, $\mathbf{u}(x)$ и т.д. для векторных и тензорных полей и $v_i(x)$, $u_{ij}(x)$ и т.д. для их компонент. Для нумерации потенциалов и полей используются верхние индексы. Например, $w_{ij}^{ln}(x)$ — это ij -ая компонента 2-тензорного поля $\mathbf{w}^{ln}(x)$ с двойным номером ln .

Через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ мы обозначаем пространство Шварца быстро убывающих C^∞ функций. Аналогично, $\mathcal{S}(S^m(\mathbb{R}^3))$ состоит из симметричных m -тензорных полей с компонентами из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Функциональное пространство $L_2(S^m(\mathbb{R}^3))$ состоит из симметричных m -тензорных полей с квадратично интегрируемыми компонентами. Обозначим пространства Соболева для симметричных m -тензорных полей через $H^k(S^m(\mathbb{R}^3))$. Для частных производных используются обозначения φ'_t и $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Там, где это не будет вызывать недопонимания, обозначение пространства $\mathbb{R}^3$ мы будем опускать.

1.1 Дифференциальные операторы, разложения векторных и симметричных 2-тензорных полей

Нам потребуются следующие дифференциальные операторы.

Оператор ковариантного дифференцирования $\nabla : H^k(T^m) \rightarrow H^{k-1}(T^{m+1})$ действует на тензорное поле $\mathbf{u}$ в соответствии с формулой

$$(\nabla \mathbf{u})_{i_1 \dots i_{m+1}}(x) = \frac{\partial u_{i_1 \dots i_m}}{\partial x_{i_{m+1}}}(x).$$

Оператор внутреннего дифференцирования $d : H^k(S^m) \rightarrow H^{k-1}(S^{m+1})$ является композицией операторов ковариантного дифференцирования ∇ и симметризации σ и действует на функцию f и векторное поле $\mathbf{v}$ по формулам

$$(df)_i = (\nabla f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (d\mathbf{v})_{ij} = (\sigma \nabla \mathbf{v})_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Оператор дивергенции $\delta : H^k(S^{m+1}) \rightarrow H^{k-1}(S^m)$ применяется к полю $\mathbf{w}$ в соответствии с правилом

$$(\delta \mathbf{w})_{i_1 \dots i_m} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial w_{i_1 \dots i_m j}}{\partial x_j}.$$

Оператор ротора $\text{rot} : H^k(S^1) \rightarrow H^{k-1}(S^1)$ действует на векторное поле $\mathbf{v}$ по следующей формуле

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right).$$

В работах [30, 29, 24] введены и исследованы обобщения оператора ротора. Операторы $\text{rot}_i : H^k(S^m) \rightarrow H^{k-1}(S^{m+1})$, $i = 1, 2, 3$ действуют на потенциал φ по формулам

$$\begin{aligned} \text{rot}_1 \varphi &= \text{rot}(\varphi, 0, 0) = \left(0, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right), \\ \text{rot}_2 \varphi &= \text{rot}(0, \varphi, 0) = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right), \\ \text{rot}_3 \varphi &= \text{rot}(0, 0, \varphi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, 0 \right). \end{aligned}$$

Применение этих операторов к векторному или тензорному полю $\mathbf{u} \in H^k(S^m)$, $m \geq 1$ определяется правилами $\text{rot}_i \mathbf{u} = \sigma \mathbf{v}$, $i = 1, 2, 3$, где компоненты поля $\mathbf{v} \in H^{k-1}(T^{m+1})$ задаются формулами

$$v_{j_1 \dots j_{m+1}} = (\text{rot}_i(u_{j_1 \dots j_m}))_{j_{m+1}}, \quad j_1, \dots, j_{m+1} = 1, 2, 3.$$

Например, применение оператора rot_1 к векторному полю $\mathbf{v}$ описывается формулой

$$\text{rot}_1 \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & -\frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) & -\frac{\partial v_3}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Действия операторов $\text{rot}^i : H^k(S^m) \rightarrow H^{k-2}(S^{m+1})$, $i = 1, 2, 3$ на потенциал φ являются композициями операторов rot_i и rot :

$\text{rot}^i \varphi = \text{rot}(\text{rot}_i \varphi)$, $i = 1, 2, 3$. Применение операторов rot^i , $i = 1, 2, 3$ к полю $\mathbf{w} \in H^k(S^m)$, $m \geq 1$ задается правилами $\text{rot}^i \mathbf{w} = \sigma \mathbf{v}$, где компоненты поля $\mathbf{v} \in H^{k-2}(T^{m+1})$ определяются равенствами

$$v_{j_1 \dots j_{m+1}} = (\text{rot}^i(w_{j_1 \dots j_m}))_{j_{m+1}}, \quad j_1, \dots, j_{m+1} = 1, 2, 3.$$

Операторы d , rot_i , rot^j , $i, j = 1, 2, 3$ перестановочны (подробности см. в [30, 24]). Для повторного применения операторов rot_i , rot^j , $i, j = 1, 2, 3$ будем использовать обозначения

$$\text{rot}_{ij} \varphi = \text{rot}_i(\text{rot}_j \varphi), \quad \text{rot}_j^i \varphi = \text{rot}^i(\text{rot}_j \varphi), \quad \text{rot}^{ij} \varphi = \text{rot}^i(\text{rot}^j \varphi).$$

Известно [5], что произвольное тензорное поле $\mathbf{w} \in H^k(S^m(\mathbb{R}^3))$ может быть единственным образом разложено в сумму *соленоидального* ${}^s \mathbf{w}$ ($\delta {}^s \mathbf{w} = 0$) и *потенциального* $d\mathbf{u}$ полей,

$$\mathbf{w} = {}^s \mathbf{w} + d\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \rightarrow 0 \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Хорошо известно (см., например, [31]), что векторное поле $\mathbf{v} \in H^k(S^1)$ соленоидально тогда и только тогда, когда существует векторное поле $\mathbf{u} \in H^{k+1}(S^1)$ такое, что $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{u}$. Следовательно, для функции φ векторные поля $\text{rot}_i \varphi$, $\text{rot}^j \varphi$, $i, j = 1, 2, 3$ — соленоидальные. В [30, 24] показано, что соленоидальными являются симметричные 2-тензорные поля $\text{rot}_{ij} \varphi$, $\text{rot}_j^i \varphi$, $\text{rot}^{ij} \varphi$, $i, j = 1, 2, 3$. Более того, для каждого фиксированного $i = 1, 2, 3$ для любого векторного поля $\mathbf{v}$ и симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{w}$ существуют более детальные, по сравнению с (1), разложения. Именно, эти поля могут быть представлены в виде сумм

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= d\varphi^0 + \text{rot}_i \varphi^1 + \text{rot}^i \varphi^2, \\ \mathbf{w} &= d^2 \varphi^{00} + d(\text{rot}_i \varphi^{01}) + d(\text{rot}^i \varphi^{02}) + \text{rot}_{ii} \varphi^{11} + \text{rot}_i^i \varphi^{12} + \text{rot}^{ii} \varphi^{22}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для единственности разложений, на потенциалы необходимо наложить дополнительные условия. Например, если $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(S^1(\mathbb{R}^3))$ и $\mathbf{w} \in \mathcal{S}(S^2(\mathbb{R}^3))$, то необходимо рассматривать потенциалы из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

1.2 Преобразование Радона

Плоскость $P_{s,\xi}$ в $\mathbb{R}^3$ задается нормальным уравнением $(\xi \cdot \mathbf{x}) - s = 0$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — единичный нормальный вектор плоскости, а s — расстояние (со знаком) от начала координат до плоскости. Точки на плоскости $P_{s,\xi}$ будем задавать равенством $\mathbf{x} = s\xi + \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \xi^\perp$, где $\xi^\perp$ — плоскость, перпендикулярная ξ и проходящая через начало координат.

Преобразование Радона $\mathcal{R}f$ функции f задается формулой

$$\mathcal{R}f(s, \xi) = \int_{P_{s, \xi}} f(x) dx = \int_{\xi^\perp} f(s\xi + y) dy.$$

Множество переменных в пространстве образов $\mathcal{R}$ обозначим $Z = \{(s, \xi) : s \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{S}^2\}$. Свойства преобразования Радона традиционно изучаются для функций $f(x)$ из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Приведем некоторые свойства и формулы обращения для преобразования Радона (подробнее см., например, [1, 32]). Нам потребуются следующие равенства

$$\mathcal{R}\varphi'_{x_i}(s, \xi) = \xi_i(\mathcal{R}\varphi)'_s(s, \xi), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Двойственный оператор $\mathcal{R}^\#$, по отношению к преобразованию Радона $\mathcal{R}$, действует на функцию $g(s, \xi)$ в соответствии с формулой

$$\mathcal{R}^\#g(x) = \int_{\mathbb{S}^2} g((x \cdot \xi), \xi) d\xi.$$

Для $0 \leq \alpha < 3$ потенциал Рисса I^α определяется формулой $F_n[I^\alpha f](z) = |z|^{-\alpha} F_n[f](z)$, где $F_n[\cdot]$ n -мерное преобразование Фурье, и применяется к функциям определенным в $\mathbb{R}^3$ ($n = 3$) и на Z ($n = 1$, преобразование Фурье применяется по первой переменной). Оператор $I^{-\alpha}$ определяется равенством $I^{-\alpha}I^\alpha f = f$. С использованием потенциала Рисса I^α и двойственного оператора $\mathcal{R}^\#$ конструируется целое семейство формул обращения.

Утверждение 1. Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Тогда для любого $0 \leq \alpha < 3$

$$f = \frac{1}{8\pi^2} I^{-\alpha} \mathcal{R}^\# I^{\alpha-2} g, \quad g = \mathcal{R}f.$$

В частности, при $\alpha = 0$ имеем

$$f = -\frac{1}{8\pi^2} \mathcal{R}^\# g''_{ss} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{S}^2} g''_{ss}(s, \xi) \Big|_{s=(x \cdot \xi)} d\xi. \quad (4)$$

Полагая $\alpha = 2$, получаем

$$f = -\frac{1}{8\pi^2} \Delta \mathcal{R}^\# g = -\frac{1}{8\pi^2} \Delta \int_{\mathbb{S}^2} g((x \cdot \xi), \xi) d\xi, \quad (5)$$

где оператор Лапласа Δ применяется по x .

1.3 Обобщенные и весовые преобразования Радона симметричных 2-тензорных полей

В настоящей работе мы рассматриваем интегральные операторы, являющиеся обобщением преобразования Радона. Там, где это будет удобно, для вектора ξ мы будем также использовать обозначение $\mathbf{e}^0$. Пусть $\mathbf{e}^1 = (e_1^1, e_2^1, e_3^1)$, $\mathbf{e}^2 = (e_1^2, e_2^2, e_3^2)$ — единичные взаимно ортогональные векторы, компланарные плоскости $\xi^\perp$. Обобщенные преобразования Радона $\mathcal{R}^{km}$, $k, m = 0, 1, 2$, $k \leq m$ симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{w}$ задаются формулами

$$\mathcal{R}^{km}\mathbf{w}(s, \xi) = \int_{P_{s, \xi}} \sum_{i, j=1}^3 e_i^k e_j^m w_{ij}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (6)$$

При $k = m = 0$ мы имеем *нормальное преобразование Радона*. Если $k = m = 1, 2$, то операторы называются *продольными преобразованиями Радона*. Наконец, если $k \neq m$, мы имеем *смешанные преобразования Радона*: $\mathcal{R}^{0m}$, $m = 1, 2$ — смешанные нормально-продольные преобразования Радона; $\mathcal{R}^{12}$ — смешанное продольное преобразование Радона. Свойства операторов $\mathcal{R}^{km}$, $k, m = 0, 1, 2$, $k \leq m$ исследовались в [24]. Пусть известны значения преобразований Радона $\mathcal{R}^{km}\mathbf{w}$, $k, m = 0, 1, 2$, $k \leq m$, действующих на симметричное 2-тензорное поле $\mathbf{w}$. В этом случае, из определений операторов (6) и ортонормированности системы векторов $\{\xi, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ следует связь операторов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^{km}$, $k, m = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}w_{ij} = & \xi_i \xi_j \mathcal{R}^{00}\mathbf{w} + (e_i^1 \xi_j + e_j^1 \xi_i) \mathcal{R}^{01}\mathbf{w} \\ & + (e_i^2 \xi_j + e_j^2 \xi_i) \mathcal{R}^{02}\mathbf{w} + e_i^1 e_j^1 \mathcal{R}^{11}\mathbf{w} \\ & + (e_i^1 e_j^2 + e_j^1 e_i^2) \mathcal{R}^{12}\mathbf{w} + e_i^2 e_j^2 \mathcal{R}^{22}\mathbf{w}, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7)$$

Эти связи и известные подходы для обращения преобразования Радона $\mathcal{R}$ позволяют получить формулы обращения и алгоритмы для численного обращения интегральных операторов (6). Например, использовать формулы обращения (4) или (5). Таким образом, для полного восстановления симметричного 2-тензорного поля в общем случае необходимо знать значения всех шести операторов $\mathcal{R}^{km}$, $k, m = 0, 1, 2$, $k \leq m$.

В силу неоднозначности выбора системы векторов $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ операторы $\mathcal{R}^{km}$, $k, m = 0, 1, 2$, $k \leq m$ также будут определяются неоднозначно. Для описания ядер и образов этих операторов использован один из наиболее естественных наборов $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ (см., например, [28]):

$$\mathbf{e}^1 = \frac{1}{\rho} (\xi_2, -\xi_1, 0), \quad \mathbf{e}^2 = \frac{1}{\rho} (\xi_1 \xi_3, \xi_2 \xi_3, -(\xi_1)^2 - (\xi_2)^2), \quad (8)$$

где $\rho = ((\xi_1)^2 + (\xi_2)^2)^{1/2}$. В сферической системе координат ($\alpha \in [0, 2\pi)$, $\beta \in (0, \pi)$) имеем

$$\begin{aligned}\xi = \mathbf{e}^0 &= (\cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \beta), & \mathbf{e}^1 &= (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0), \\ \mathbf{e}^2 &= (\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \cos \beta, -\sin \beta), & \rho &= \sin \beta.\end{aligned}$$

Утверждение 2. Пусть $\varphi^{ij} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $i, j = 0, 1, 2$, $i \leq j$, тогда для полей

$$\Phi^{00} = d^2 \varphi^{00}, \quad \Phi^{01} = d(\text{rot}_3 \varphi^{01}), \quad \Phi^{02} = d(\text{rot}_3^3 \varphi^{02}), \quad (9)$$

$$\Phi^{11} = \text{rot}_{33} \varphi^{11}, \quad \Phi^{12} = \text{rot}_3^3 \varphi^{12}, \quad \Phi^{22} = \text{rot}_3^3 \varphi^{22} \quad (10)$$

имеют место следующие равенства (для переменных s, ξ):

$$\mathcal{R}^{kl} \Phi^{ij} = 0, \quad \text{где } k, l = 0, 1, 2, \quad k \leq l, \quad k \neq i \quad \text{или } l \neq j,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{00} \Phi^{00} &= (\mathcal{R} \varphi^{00})''_{ss}, & \mathcal{R}^{01} \Phi^{01} &= \frac{\rho}{2} (\mathcal{R} \varphi^{01})''_{ss}, & \mathcal{R}^{02} \Phi^{02} &= \frac{\rho}{2} (\mathcal{R} \varphi^{02})'''_{sss}, \\ \mathcal{R}^{11} \Phi^{11} &= \rho^2 (\mathcal{R} \varphi^{11})''_{ss}, & \mathcal{R}^{12} \Phi^{12} &= \frac{\rho^2}{2} (\mathcal{R} \varphi^{12})'''_{sss}, & \mathcal{R}^{22} \Phi^{22} &= \rho^2 (\mathcal{R} \varphi^{22})'''_{sss}.\end{aligned}$$

Таким образом, по значениям каждого из операторов $\mathcal{R}^{km}$, $k, m = 0, 1, 2$, $k \leq m$ можно восстановить лишь одно слагаемое в разложении (2) поля $\mathbf{w} \in \mathcal{S}(S^2(\mathbb{R}^3))$.

В данной работе совместно с нормальными и продольными преобразованиями Радона $\mathcal{R}^{kk}$, $k = 0, 1, 2$ предлагается рассмотреть весовые преобразования Радона. Весовые преобразования Радона $\mathcal{W}_l^{kk}$, $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$ действуют на симметричное 2-тензорное поле $\mathbf{w}$ по правилам

$$\mathcal{W}_l^{kk} \mathbf{w}(s, \xi) = \int_{P_{s, \xi}} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^l) \left(\sum_{i, j=1}^3 e_i^k e_j^k w_{ij}(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x}, \quad k = 0, 1, 2, \quad l = 1, 2.$$

Для описания ядер и образов операторов $\mathcal{W}_l^{kk}$, $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$ будем использовать набор $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$, задаваемый формулами (8) и его представление в сферической системе координат. При исследовании нам потребуются некоторые свойства интегральных операторов, действующих на векторные поля. Приведем их в следующем подразделе (подробности см. в [29]).

1.4 Весовые преобразования Радона векторных полей

Весовые преобразования Радона $\mathcal{W}_l^k$, $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$ векторного поля $\mathbf{v}$ определяются равенствами

$$\mathcal{W}_l^k \mathbf{v}(s, \xi) = \int_{P_{s, \xi}} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^l) (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}.$$

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2025, Том 28, № 4, С. 132-157

Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 4, P. 132-157

Описания ядер и образов этих операторов приведены в утверждении.

Утверждение 3. Пусть $\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ — потенциалы полей $\Phi^0 = d\varphi^0$, $\Phi^1 = \text{rot}_3\varphi^1$ и $\Phi^2 = \text{rot}^3\varphi^2$, соответственно. Тогда имеют место равенства (для переменных $s, \xi(\alpha, \beta)$):

$$\mathcal{W}_1^0\Phi^0 = \rho^{-1}(\mathcal{R}\varphi^0)'_\alpha, \quad \mathcal{W}_1^0\Phi^1 = \rho(\mathcal{R}\varphi^1), \quad \mathcal{W}_1^0\Phi^2 = 0, \quad (11)$$

$$\mathcal{W}_2^0\Phi^0 = -(\mathcal{R}\varphi^0)'_\beta, \quad \mathcal{W}_2^0\Phi^1 = 0, \quad \mathcal{W}_2^0\Phi^2 = \rho(\mathcal{R}\varphi^2)'_s, \quad (12)$$

$$\mathcal{W}_1^1\Phi^0 = -\mathcal{R}\varphi^0, \quad \mathcal{W}_1^1\Phi^1 = (\mathcal{R}\varphi^1)'_\alpha, \quad \mathcal{W}_1^1\Phi^2 = -\cos\beta(\mathcal{R}\varphi^2)'_s, \quad (13)$$

$$\mathcal{W}_2^1\Phi^0 = 0, \quad \mathcal{W}_2^1\Phi^1 = -(\rho(\mathcal{R}\varphi^1))'_\beta, \quad \mathcal{W}_2^1\Phi^2 = 0, \quad (14)$$

$$\mathcal{W}_1^2\Phi^0 = 0, \quad \mathcal{W}_1^2\Phi^1 = \cos\beta(\mathcal{R}\varphi^1), \quad \mathcal{W}_1^2\Phi^2 = (\mathcal{R}\varphi^2)''_{s\alpha}, \quad (15)$$

$$\mathcal{W}_2^2\Phi^0 = -\mathcal{R}\varphi^0, \quad \mathcal{W}_2^2\Phi^1 = 0, \quad \mathcal{W}_2^2\Phi^2 = -(\rho(\mathcal{R}\varphi^2)'_s)'_\beta. \quad (16)$$

Необходимо отметить, что в выражении для значения $\mathcal{W}_2^2\Phi^2$ в [29] присутствует опечатка.

§ 2. Исследование весовых преобразований Радона тензорных полей ранга 2

Укажем связь весовых преобразований Радона $\mathcal{W}_l^{kk}$, $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$ симметричных тензорных полей ранга 2 и весовых преобразований Радона $\mathcal{W}_l^k$, $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$ векторных полей.

Лемма 1. Пусть $\varphi^{ij} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $i, j = 0, 1, 2$, $i \leq j$, тогда для полей (9), (10) имеют место следующие равенства (для переменных s, ξ):

$$\mathcal{W}_l^{kk}\Phi^{00} = \sum_{i=1}^3 e_i^k \mathcal{W}_l^k d(\varphi^{00})_i, \quad (17)$$

$$\mathcal{W}_l^{kk}\Phi^{01} = \sum_{i=1}^3 e_i^k \mathcal{W}_l^k d(\text{rot}_3\varphi^{01})_i = \sum_{i=1}^3 e_i^k \mathcal{W}_l^k \text{rot}_3(d\varphi^{01})_i, \quad (18)$$

$$\mathcal{W}_l^{kk}\Phi^{02} = \sum_{i=1}^3 e_i^k \mathcal{W}_l^k d(\text{rot}^3\varphi^{02})_i = \sum_{i=1}^3 e_i^k \mathcal{W}_l^k \text{rot}^3(d\varphi^{02})_i, \quad (19)$$

$$\mathcal{W}_l^{kk}\Phi^{11} = \sum_{i=1}^3 e_i^k \mathcal{W}_l^k \text{rot}_3(\text{rot}_3\varphi^{11})_i, \quad (20)$$

$$\mathcal{W}_l^{kk}\Phi^{12} = \sum_{i=1}^3 e_i^k \mathcal{W}_l^k \text{rot}^3(\text{rot}_3\varphi^{12})_i = \sum_{i=1}^3 e_i^k \mathcal{W}_l^k \text{rot}_3(\text{rot}^3\varphi^{12})_i, \quad (21)$$

$$\mathcal{W}_l^{kk}\Phi^{22} = \sum_{i=1}^3 e_i^k \mathcal{W}_l^k \text{rot}^3(\text{rot}^3\varphi^{22})_i, \quad (22)$$

где $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$.

Доказательство. Приведем рассуждения для нахождения значения $\mathcal{W}_l^{kk}\Phi^{00}$. Переходя от двойного суммирования к повторному и используя определения операторов $\mathcal{W}_l^{kk}$ и $\mathcal{W}_l^k$, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_l^{kk}\Phi^{00} &= \int_{P_{s,\xi}} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^l) \left(\sum_{i,j=1}^3 e_i^k e_j^k (d^2\varphi^{00})_{ij}(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^3 e_i^k \int_{P_{s,\xi}} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^l) (\mathbf{e}^k \cdot d(d\varphi^{00})_i(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 e_i^k \mathcal{W}_l^k d(d\varphi^{00})_i.\end{aligned}$$

Остальные равенства получаются аналогично. $\square$

Получим значения для каждого из операторов $\mathcal{W}_l^{kk}$, $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$.

Теорема 1. Пусть $\varphi^{ij} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $i, j = 0, 1, 2$, $i \leq j$, тогда для полей (9),(10) имеют место следующие равенства (для переменных $s, \xi(\alpha, \beta)$):

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_1^{00}\Phi^{00} &= \frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}\varphi^{00})''_{s\alpha}, \quad \mathcal{W}_1^{00}\Phi^{01} = \sin\beta(\mathcal{R}\varphi^{01})'_s, \\ \mathcal{W}_1^{00}\Phi^{02} &= \mathcal{W}_1^{00}\Phi^{11} = \mathcal{W}_1^{00}\Phi^{12} = \mathcal{W}_1^{00}\Phi^{22} = 0.\end{aligned}$$

Доказательство. Для полей Φ^{02}, Φ^{12} и Φ^{22} результат следует из формул (19),(21),(22) и равенств $\mathcal{W}_1^0 \text{rot}^3 \varphi = 0$ (см. (11)). Для оставшихся полей, используя формулы (17),(18),(20),(11) и (3), получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_1^{00}\Phi^{00} &= \sum_{i=1}^3 \xi_i \mathcal{W}_1^0 d(d\varphi^{00})_i = \frac{1}{\sin\beta} \sum_{i=1}^3 \xi_i (\mathcal{R}(d\varphi^{00})_i)'_{\alpha} \\ &= \frac{1}{\sin\beta} (\xi \cdot \xi) (\mathcal{R}\varphi^{00})''_{s\alpha} - (\xi \cdot \mathbf{e}^1) (\mathcal{R}\varphi^{00})'_s = \frac{1}{\sin\beta} (\mathcal{R}\varphi^{00})''_{s\alpha}, \\ \mathcal{W}_1^{00}\Phi^{01} &= \sum_{i=1}^3 \xi_i \mathcal{W}_1^0 d(\text{rot}_3 \varphi^{01})_i = \frac{1}{\sin\beta} \sum_{i=1}^3 \xi_i (\mathcal{R}(\text{rot}_3 \varphi^{01})_i)'_{\alpha} \\ &= (\xi \cdot \mathbf{e}^1) (\mathcal{R}\varphi^{01})''_{s\alpha} + (\xi \cdot (\mathbf{e}^1)'_{\alpha}) (\mathcal{R}\varphi^{01})'_s = \sin\beta (\mathcal{R}\varphi^{01})'_s, \\ \mathcal{W}_1^{00}\Phi^{11} &= \sum_{i=1}^3 \xi_i \mathcal{W}_1^0 \text{rot}_3 (\text{rot}_3 \varphi^{11})_i = \sin\beta \sum_{i=1}^3 \xi_i \mathcal{R}(\text{rot}_3 \varphi^{11})_i \\ &= \sin^2 \beta (\xi \cdot \mathbf{e}^1) (\mathcal{R}\varphi^{11})'_s = 0.\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. $\square$

Из Теоремы следует, что поля $\Phi^{02}, \Phi^{11}, \Phi^{12}$ и Φ^{22} лежат в ядре оператора $\mathcal{W}_1^{00}$.

Теорема 2. Пусть $\varphi^{ij} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $i, j = 0, 1, 2$, $i \leq j$, тогда для полей (9),(10) имеют место следующие равенства (для переменных $s, \xi(\alpha, \beta)$):

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_2^{00}\Phi^{00} &= -(\mathcal{R}\varphi^{00})''_{s\beta}, & \mathcal{W}_2^{00}\Phi^{02} &= \sin\beta(\mathcal{R}\varphi^{02})''_{ss}, \\ \mathcal{W}_2^{00}\Phi^{01} &= \mathcal{W}_2^{00}\Phi^{11} = \mathcal{W}_2^{00}\Phi^{12} = \mathcal{W}_2^{00}\Phi^{22} = 0.\end{aligned}$$

Доказательство. Результат для полей Φ^{01}, Φ^{11} и Φ^{12} непосредственно следует из формул (18), (20), (21) и равенств $\mathcal{W}_2^0 \text{rot}_3 \varphi = 0$ (см. (12)). Для других полей, используя формулы (17), (19), (22), (12) и (3), имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_2^{00}\Phi^{00} &= \sum_{i=1}^3 \xi_i \mathcal{W}_2^0 d(d\varphi^{00})_i = - \sum_{i=1}^3 \xi_i (\mathcal{R}(d\varphi^{00})_i)'_{\beta} \\ &= -(\xi \cdot \xi)(\mathcal{R}\varphi^{00})''_{s\beta} - (\xi \cdot \mathbf{e}^2)(\mathcal{R}\varphi^{00})'_s = -(\mathcal{R}\varphi^{00})''_{s\beta}, \\ \mathcal{W}_2^{00}\Phi^{02} &= \sum_{i=1}^3 \xi_i \mathcal{W}_2^0 d(\text{rot}_3 \varphi^{02})_i = - \sum_{i=1}^3 \xi_i (\mathcal{R}(\text{rot}_3 \varphi^{02})_i)'_{\beta} \\ &= -\sin\beta(\xi \cdot \mathbf{e}^2)(\mathcal{R}\varphi^{02})'''_{ss\beta} + \sin\beta(\xi \cdot \xi)(\mathcal{R}\varphi^{02})''_{ss} = \sin\beta(\mathcal{R}\varphi^{02})''_{ss}, \\ \mathcal{W}_2^{00}\Phi^{22} &= \sum_{i=1}^3 \xi_i \mathcal{W}_2^0 \text{rot}_3(\text{rot}_3 \varphi^{22})_i = \sin\beta \sum_{i=1}^3 \xi_i (\mathcal{R}(\text{rot}_3 \varphi^{22})_i)'_s \\ &= \sin^2\beta(\xi \cdot \mathbf{e}^2)(\mathcal{R}\varphi^{22})'''_{sss} = 0. \quad \square\end{aligned}$$

Следовательно поля $\Phi^{01}, \Phi^{11}, \Phi^{12}$ и Φ^{22} лежат в ядре оператора $\mathcal{W}_2^{00}$.

Теорема 3. Пусть $\varphi^{ij} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $i, j = 0, 1, 2$, $i \leq j$, тогда для полей (9), (10) имеют место следующие равенства (для переменных $s, \xi(\alpha, \beta)$):

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_1^{11}\Phi^{01} &= -\sin\beta(\mathcal{R}\varphi^{01})'_s, & \mathcal{W}_1^{11}\Phi^{00} &= \mathcal{W}_1^{11}\Phi^{02} = \mathcal{W}_1^{11}\Phi^{22} = 0, \\ \mathcal{W}_1^{11}\Phi^{11} &= \sin\beta(\mathcal{R}\varphi^{11})''_{s\alpha}, & \mathcal{W}_1^{11}\Phi^{12} &= -\sin\beta\cos\beta(\mathcal{R}\varphi^{12})''_{ss}.\end{aligned}$$

Доказательство. Воспользовавшись формулами (17)–(22), (13) и (3), получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_1^{11}\Phi^{00} &= \sum_{i=1}^3 e_i^1 \mathcal{W}_1^1 d(d\varphi^{00})_i = - \sum_{i=1}^3 e_i^1 \mathcal{R}(d\varphi^{00})_i = -(\mathbf{e}^1 \cdot \xi)(\mathcal{R}\varphi^{00})'_s = 0, \\ \mathcal{W}_1^{11}\Phi^{01} &= \sum_{i=1}^3 e_i^1 \mathcal{W}_1^1 d(\text{rot}_3 \varphi^{01})_i = - \sum_{i=1}^3 e_i^1 \mathcal{R}(\text{rot}_3 \varphi^{01})_i \\ &= -\sin\beta(\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}^1)(\mathcal{R}\varphi^{01})'_s = -\sin\beta(\mathcal{R}\varphi^{01})'_s, \\ \mathcal{W}_1^{11}\Phi^{02} &= \sum_{i=1}^3 e_i^1 \mathcal{W}_1^1 d(\text{rot}_3 \varphi^{02})_i = - \sum_{i=1}^3 e_i^1 \mathcal{R}(\text{rot}_3 \varphi^{02})_i \\ &= -\sin\beta(\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}^2)(\mathcal{R}\varphi^{02})''_{ss} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_1^{11}\Phi^{11} &= \sum_{i=1}^3 e_i^1 \mathcal{W}_1^1 \text{rot}_3(\text{rot}_3\varphi^{11})_i = \sum_{i=1}^3 e_i^1 (\mathcal{R}(\text{rot}_3\varphi^{11})_i)'_{\alpha} \\
&= \sum_{i=1}^3 e_i^1 (\sin \beta e_i^1 (\mathcal{R}\varphi^{11})'_s)'_{\alpha} = \sin \beta (\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}^1) (\mathcal{R}\varphi^{11})''_{s\alpha} + (\mathbf{e}^1 \cdot \xi) (\mathcal{R}\varphi^{11})'_s \\
&= \sin \beta (\mathcal{R}\varphi^{11})''_{s\alpha}, \\
\mathcal{W}_1^{11}\Phi^{12} &= \sum_{i=1}^3 e_i^1 \mathcal{W}_1^1 \text{rot}_3(\text{rot}_3\varphi^{12})_i = - \sum_{i=1}^3 e_i^1 \cos \beta (\mathcal{R}(\text{rot}_3\varphi^{12})_i)'_s \\
&= - \sin \beta \cos \beta (\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}^1) (\mathcal{R}\varphi^{12})''_{ss} = - \sin \beta \cos \beta (\mathcal{R}\varphi^{12})''_{ss}, \\
\mathcal{W}_1^{11}\Phi^{22} &= \sum_{i=1}^3 e_i^1 \mathcal{W}_1^1 \text{rot}_3(\text{rot}_3\varphi^{22})_i = - \sum_{i=1}^3 e_i^1 \cos \beta (\mathcal{R}(\text{rot}_3\varphi^{22})_i)'_s \\
&= - \sin \beta \cos \beta (\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}^2) (\mathcal{R}\varphi^{22})'''_{sss} = 0.
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. $\square$

Получили, что поля Φ^{00}, Φ^{02} и Φ^{22} лежат в ядре оператора $\mathcal{W}_1^{11}$.

Теорема 4. Пусть $\varphi^{ij} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $i, j = 0, 1, 2$, $i \leq j$, тогда для полей (9), (10) имеют место следующие равенства (для переменных $s, \xi(\alpha, \beta)$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_2^{11}\Phi^{00} &= \mathcal{W}_2^{11}\Phi^{01} = \mathcal{W}_2^{11}\Phi^{02} = \mathcal{W}_2^{11}\Phi^{12} = \mathcal{W}_2^{11}\Phi^{22} = 0, \\
\mathcal{W}_2^{11}\Phi^{11} &= -(\sin^2 \beta (\mathcal{R}\varphi^{11})'_s)'_{\beta}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Для полей $\Phi^{00}, \Phi^{01}, \Phi^{02}, \Phi^{12}$ и Φ^{22} результат следует из формул (17)–(19), (21), (22) и равенств $\mathcal{W}_2^1 d\varphi = \mathcal{W}_2^1 \text{rot}^3 \varphi = 0$ (см. (14)). Для поля Φ^{11} , воспользовавшись формулами (20), (14) и (3), имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_2^{11}\Phi^{11} &= \sum_{i=1}^3 e_i^1 \mathcal{W}_2^1 \text{rot}_3(\text{rot}_3\varphi^{11})_i = - \sum_{i=1}^3 e_i^1 (\sin \beta (\mathcal{R}(\text{rot}_3\varphi^{11})_i))'_{\beta} \\
&= -(\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}^1) (\sin^2 \beta (\mathcal{R}\varphi^{11})'_s)'_{\beta} = -(\sin^2 \beta (\mathcal{R}\varphi^{11})'_s)'_{\beta}. \quad \square
\end{aligned}$$

Из Теоремы следует, что почти все поля (9), (10) (кроме поля Φ^{11}) лежат в ядре оператора $\mathcal{W}_2^{11}$. Таким образом, по значениям оператора $\mathcal{W}_2^{11}$ можно надеяться на восстановление лишь соленоидальной части Φ^{11} , как и по значениям безвесового оператора $\mathcal{R}^{11}$.

Теорема 5. Пусть $\varphi^{ij} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $i, j = 0, 1, 2$, $i \leq j$, тогда для полей (9), (10) имеют место следующие равенства (для переменных $s, \xi(\alpha, \beta)$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_1^{22}\Phi^{00} &= \mathcal{W}_1^{22}\Phi^{01} = \mathcal{W}_1^{22}\Phi^{02} = \mathcal{W}_1^{22}\Phi^{11} = 0, \\
\mathcal{W}_1^{22}\Phi^{12} &= \sin \beta \cos \beta (\mathcal{R}\varphi^{12})''_{ss}, \quad \mathcal{W}_1^{22}\Phi^{22} = \sin \beta (\mathcal{R}\varphi^{22})'''_{sss\alpha}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Для полей Φ^{00}, Φ^{01} и Φ^{02} результат следует из формул (17)–(19) и равенства $\mathcal{W}_1^2 d\varphi = 0$ (см. (15)). Для остальных полей, используя формулы (20)–(22), (15) и (3), имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_1^{22}\Phi^{11} &= \sum_{i=1}^3 e_i^2 \mathcal{W}_1^2 \text{rot}_3(\text{rot}_3 \varphi^{11})_i = \sum_{i=1}^3 e_i^2 \cos \beta \mathcal{R}(\text{rot}_3 \varphi^{11})_i \\ &= (\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}^1) \cos \beta \sin \beta (\mathcal{R}\varphi^{11})'_s = 0, \\ \mathcal{W}_1^{22}\Phi^{12} &= \sum_{i=1}^3 e_i^2 \mathcal{W}_1^2 \text{rot}_3(\text{rot}_3 \varphi^{12})_i = \sum_{i=1}^3 e_i^2 \cos \beta \mathcal{R}(\text{rot}_3 \varphi^{12})_i \\ &= (\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}^2) \cos \beta \sin \beta (\mathcal{R}\varphi^{12})''_{ss} = \sin \beta \cos \beta (\mathcal{R}\varphi^{12})''_{ss}, \\ \mathcal{W}_1^{22}\Phi^{22} &= \sum_{i=1}^3 e_i^2 \mathcal{W}_1^2 \text{rot}_3(\text{rot}_3 \varphi^{22})_i = \sum_{i=1}^3 e_i^2 (\mathcal{R}(\text{rot}_3 \varphi^{22})_i)''_{s\alpha} \\ &= \sum_{i=1}^3 e_i^2 (\sin \beta e_i^2 (\mathcal{R}\varphi^{22})'''_{sss})'_\alpha = \sin \beta (\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}^2) (\mathcal{R}\varphi^{22})''''_{sss\alpha} \\ &\quad - \sin \beta \cos \beta (\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}^1) (\mathcal{R}\varphi^{22})'''_{sss} = \sin \beta (\mathcal{R}\varphi^{22})''''_{sss\alpha}.\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. $\square$

Следовательно поля $\Phi^{00}, \Phi^{01}, \Phi^{02}$ и Φ^{11} лежат в ядре оператора $\mathcal{W}_1^{22}$.

Теорема 6. Пусть $\varphi^{ij} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $i, j = 0, 1, 2$, $i \leq j$, тогда для полей (9), (10) имеют место следующие равенства (для переменных $s, \xi(\alpha, \beta)$):

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_2^{22}\Phi^{00} &= \mathcal{W}_2^{22}\Phi^{01} = \mathcal{W}_2^{22}\Phi^{11} = \mathcal{W}_2^{22}\Phi^{12} = 0, \\ \mathcal{W}_2^{22}\Phi^{02} &= -\sin \beta (\mathcal{R}\varphi^{02})''_{ss}, \quad \mathcal{W}_2^{22}\Phi^{22} = -(\sin^2 \beta (\mathcal{R}\varphi^{22})'''_{sss})'_\beta.\end{aligned}$$

Доказательство. Для полей Φ^{01}, Φ^{11} и Φ^{12} результат следует из формул (18), (20), (21) и равенства $\mathcal{W}_2^2 \text{rot}_3 \varphi = 0$ (см. (16)). Для других полей, используя формулы (17), (19), (22), (16) и (3), получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_2^{22}\Phi^{00} &= \sum_{i=1}^3 e_i^2 \mathcal{W}_2^2 d(\varphi^{00})_i = -\sum_{i=1}^3 e_i^2 \mathcal{R}(d\varphi^{00})_i = -(\mathbf{e}^2 \cdot \xi) (\mathcal{R}\varphi^{00})'_s = 0, \\ \mathcal{W}_2^{22}\Phi^{02} &= \sum_{i=1}^3 e_i^2 \mathcal{W}_2^2 d(\text{rot}_3 \varphi^{02})_i = -\sum_{i=1}^3 e_i^2 \mathcal{R}(\text{rot}_3 \varphi^{02})_i \\ &= -\sin \beta (\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}^2) (\mathcal{R}\varphi^{02})''_{ss} = -\sin \beta (\mathcal{R}\varphi^{02})''_{ss},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_2^{22}\Phi^{22} &= \sum_{i=1}^3 e_i^2 \mathcal{W}_2^2 \text{rot}^3(\text{rot}^3 \varphi^{22})_i = - \sum_{i=1}^3 e_i^2 \left(\sin \beta (\mathcal{R}(\text{rot}^3 \varphi^{22})_i)_s' \right)_\beta' \\
&= - \sum_{i=1}^3 e_i^2 (\sin^2 \beta e_i^2 (\mathcal{R}\varphi^{22})_{sss}''')'_\beta = -(\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}^2) (\sin^2 \beta (\mathcal{R}\varphi^{22})_{sss}''')'_\beta \\
&\quad + (\mathbf{e}^2 \cdot \xi) \sin^2 \beta (\mathcal{R}\varphi^{22})_{sss}''' = -(\sin^2 \beta (\mathcal{R}\varphi^{22})_{sss}''')'_\beta. \quad \square
\end{aligned}$$

Получили, что поля Φ^{00} , Φ^{01} , Φ^{11} и Φ^{12} лежат в ядре оператора $\mathcal{W}_2^{22}$. Очевидно, что значения весовых преобразований Радона $\mathcal{W}_l^{kk}$, $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$ симметричных 2-тензорных полей (за исключением оператора $\mathcal{W}_2^{11}$) дают больше информации об исследуемом поле нежели операторы $\mathcal{R}^{km}$, $k, m = 0, 1, 2$, $k \leq m$. В следующем разделе применим полученные результаты для восстановления симметричных 2-тензорных полей.

§ 3. Восстановление симметричных тензорных полей ранга 2

Приведем формулировку рассматриваемой задачи.

Задача тензорной томографии. Пусть даны значения операторов $\mathcal{R}^{00}\mathbf{w}$, $\mathcal{R}^{11}\mathbf{w}$, $\mathcal{R}^{22}\mathbf{w}$ и трех весовых преобразований Радона. Необходимо восстановить 3D симметричное 2-тензорное поле $\mathbf{w}$.

Из формул (7) следует, что для полного восстановления симметричного 2-тензорного поля в общем случае необходимо знать значения не только поперечного $\mathcal{R}^{00}$ и продольных преобразований Радона $\mathcal{R}^{11}$, $\mathcal{R}^{22}$, но и значения трех смешанных преобразований Радона $\mathcal{R}^{01}$, $\mathcal{R}^{02}$ и $\mathcal{R}^{12}$. Поэтому необходимо установить, какими операторами можно заменить операторы $\mathcal{R}^{01}$, $\mathcal{R}^{02}$ и $\mathcal{R}^{12}$. Из Теорем 1–6 следует, что потенциальное поле Φ^{01} не лежит в ядре операторов $\mathcal{W}_1^{00}$ и $\mathcal{W}_1^{11}$.

Используя разложение (2), Утверждение 2, Теоремы 1 и 3, получаем связи:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{01}\mathbf{w} &= \frac{\sin \beta}{2} (\mathcal{R}\varphi^{01})_{ss}'' = \frac{1}{2} (\mathcal{W}_1^{00}\Phi^{01})_s' = \frac{1}{2} (\mathcal{W}_1^{00}\mathbf{w} - \mathcal{W}_1^{00}\Phi^{00})_s' \\
&= \frac{1}{2} ((\mathcal{W}_1^{00}\mathbf{w})_s' - \frac{1}{\sin \beta} (\mathcal{R}\varphi^{00})_{ss\alpha}''') = \frac{1}{2} ((\mathcal{W}_1^{00}\mathbf{w})_s' - \frac{1}{\sin \beta} (\mathcal{R}^{00}\mathbf{w})_\alpha'), \\
\mathcal{R}^{01}\mathbf{w} &= \frac{\sin \beta}{2} (\mathcal{R}\varphi^{01})_{ss}'' = -\frac{1}{2} (\mathcal{W}_1^{11}\Phi^{01})_s' = -\frac{1}{2} (\mathcal{W}_1^{11}\mathbf{w} - \mathcal{W}_1^{11}\Phi^{11} - \mathcal{W}_1^{11}\Phi^{12})_s' \\
&= -\frac{1}{2} ((\mathcal{W}_1^{11}\mathbf{w})_s' - \sin \beta (\mathcal{R}\varphi^{11})_{ss\alpha}''' + \sin \beta \cos \beta (\mathcal{R}\varphi^{12})_{sss}''') \\
&= -\frac{1}{2} ((\mathcal{W}_1^{11}\mathbf{w})_s' - \frac{1}{\sin \beta} (\mathcal{R}^{11}\mathbf{w})_\alpha' + \frac{2 \cos \beta}{\sin \beta} \mathcal{R}^{12}\mathbf{w}).
\end{aligned}$$

Таким образом, получены равенства

$$\mathcal{R}^{01}\mathbf{w} = \frac{1}{2\sin\beta}(\sin\beta(\mathcal{W}_1^{00}\mathbf{w})'_s - (\mathcal{R}^{00}\mathbf{w})'_\alpha), \quad (23)$$

$$\mathcal{R}^{01}\mathbf{w} = -\frac{1}{2\sin\beta}(\sin\beta(\mathcal{W}_1^{11}\mathbf{w})'_s - (\mathcal{R}^{11}\mathbf{w})'_\alpha + 2\cos\beta\mathcal{R}^{12}\mathbf{w}). \quad (24)$$

Следовательно, вместо значений оператора $\mathcal{R}^{01}$ можно использовать, например, совместно заданные значения операторов $\mathcal{W}_1^{00}$ и $\mathcal{R}^{00}$ (формула (23)). В формуле (24) помимо $\mathcal{W}_1^{11}$ и $\mathcal{R}^{11}$ присутствует оператор $\mathcal{R}^{12}$, значения которого можно определить по формуле (28).

Потенциальное поле Φ^{02} не лежит в ядре операторов $\mathcal{W}_2^{00}$ и $\mathcal{W}_2^{22}$, и имеют место связи:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{02}\mathbf{w} &= \frac{\sin\beta}{2}(\mathcal{R}\varphi^{02})'''_{sss} = \frac{1}{2}(\mathcal{W}_2^{00}\Phi^{02})'_s = \frac{1}{2}(\mathcal{W}_2^{00}\mathbf{w} - \mathcal{W}_2^{00}\Phi^{00})'_s \\ &= \frac{1}{2}((\mathcal{W}_2^{00}\mathbf{w})'_s + (\mathcal{R}\varphi^{00})'''_{ss\beta}) = \frac{1}{2}((\mathcal{W}_2^{00}\mathbf{w})'_s + (\mathcal{R}^{00}\mathbf{w})'_\beta), \\ \mathcal{R}^{02}\mathbf{w} &= \frac{\sin\beta}{2}(\mathcal{R}\varphi^{02})''_{ss} = -\frac{1}{2}(\mathcal{W}_2^{22}\Phi^{02})'_s = -\frac{1}{2}(\mathcal{W}_2^{22}\mathbf{w} - \mathcal{W}_2^{22}\Phi^{22})'_s \\ &= -\frac{1}{2}((\mathcal{W}_2^{22}\mathbf{w})'_s + (\sin^2\beta(\mathcal{R}\varphi^{22})'''_{ssss})'_\beta) = -\frac{1}{2}((\mathcal{W}_2^{22}\mathbf{w})'_s + (\mathcal{R}^{22}\mathbf{w})'_\beta). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались разложением (2), Утверждением 2, Теоремами 2 и 6. Т.е., имеют место равенства

$$\mathcal{R}^{02}\mathbf{w} = \frac{1}{2}((\mathcal{W}_2^{00}\mathbf{w})'_s + (\mathcal{R}^{00}\mathbf{w})'_\beta), \quad (25)$$

$$\mathcal{R}^{02}\mathbf{w} = -\frac{1}{2}((\mathcal{W}_2^{22}\mathbf{w})'_s + (\mathcal{R}^{22}\mathbf{w})'_\beta). \quad (26)$$

Наконец, рассмотрим соленоидальное поле Φ^{12} , которое не лежит в ядре операторов $\mathcal{W}_1^{11}$ и $\mathcal{W}_1^{22}$. Используя разложение (2), Утверждение 2, Теоремы 3 и 5, получаем связи:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{12}\mathbf{w} &= \frac{\sin^2\beta}{2}(\mathcal{R}\varphi^{12})'''_{sss} = -\frac{\sin\beta}{2\cos\beta}(\mathcal{W}_1^{11}\Phi^{12})'_s \\ &= -\frac{\sin\beta}{2\cos\beta}(\mathcal{W}_1^{11}\mathbf{w} - \mathcal{W}_1^{11}\Phi^{11} - \mathcal{W}_1^{11}\Phi^{01})'_s \\ &= -\frac{\sin\beta}{2\cos\beta}((\mathcal{W}_1^{11}\mathbf{w})'_s - \sin\beta(\mathcal{R}\varphi^{11})'''_{ss\alpha} + \sin\beta(\mathcal{R}\varphi^{01})''_{ss}) \\ &= -\frac{\sin\beta}{2\cos\beta}((\mathcal{W}_1^{11}\mathbf{w})'_s - \frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^{11}\mathbf{w})'_\alpha + 2\mathcal{R}^{01}\mathbf{w}), \\ \mathcal{R}^{12}\mathbf{w} &= \frac{\sin^2\beta}{2}(\mathcal{R}\varphi^{12})'''_{sss} = \frac{\sin\beta}{2\cos\beta}(\mathcal{W}_1^{22}\Phi^{12})'_s = \frac{\sin\beta}{2\cos\beta}(\mathcal{W}_1^{22}\mathbf{w} - \mathcal{W}_1^{22}\Phi^{22})'_s \\ &= \frac{\sin\beta}{2\cos\beta}((\mathcal{W}_1^{22}\mathbf{w})'_s - \sin\beta(\mathcal{R}\varphi^{22})'''_{ssss\alpha}) = \frac{\sin\beta}{2\cos\beta}((\mathcal{W}_1^{22}\mathbf{w})'_s - \frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^{22}\mathbf{w})'_\alpha). \end{aligned}$$

Таким образом, имеют место равенства

$$\mathcal{R}^{12}\mathbf{w} = -\frac{1}{2\cos\beta}(\sin\beta(\mathcal{W}_1^{11}\mathbf{w})'_s - (\mathcal{R}^{11}\mathbf{w})'_\alpha + 2\sin\beta\mathcal{R}^{01}\mathbf{w}), \quad (27)$$

$$\mathcal{R}^{12}\mathbf{w} = \frac{1}{2\cos\beta}(\sin\beta(\mathcal{W}_1^{22}\mathbf{w})'_s - (\mathcal{R}^{22}\mathbf{w})'_\alpha). \quad (28)$$

Формулы (23)–(28), дают возможность указать шесть различных наборов данных (см. Таблицу 1), достаточных для полного восстановления симметричного тензорного поля $\mathbf{w}$ ранга 2.

Таблица 1: наборы данных для задачи тензорной томографии.

Номер задачи	Данные задачи
1	$\mathcal{R}^{00}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{11}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{22}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{00}\mathbf{w}, \mathcal{W}_2^{00}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{22}\mathbf{w}$
2	$\mathcal{R}^{00}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{11}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{22}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{11}\mathbf{w}, \mathcal{W}_2^{00}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{22}\mathbf{w}$
3	$\mathcal{R}^{00}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{11}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{22}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{00}\mathbf{w}, \mathcal{W}_2^{00}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{11}\mathbf{w}$
4	$\mathcal{R}^{00}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{11}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{22}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{00}\mathbf{w}, \mathcal{W}_2^{22}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{22}\mathbf{w}$
5	$\mathcal{R}^{00}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{11}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{22}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{11}\mathbf{w}, \mathcal{W}_2^{22}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{22}\mathbf{w}$
6	$\mathcal{R}^{00}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{11}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{22}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{00}\mathbf{w}, \mathcal{W}_2^{22}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{11}\mathbf{w}$

Отметим основные отличия и сходства этих наборов. В данных Задач 1–3 помимо значений операторов $\mathcal{R}^{00}$, $\mathcal{R}^{11}$, $\mathcal{R}^{22}$, $\mathcal{W}_2^{00}$ присутствуют два оператора из набора $\{\mathcal{W}_1^{00}, \mathcal{W}_1^{11}, \mathcal{W}_1^{22}\}$. Постановки Задач 4–6 отличаются от постановок Задач 1–3 заменой одного оператора: вместо $\mathcal{W}_2^{00}$ известны значения $\mathcal{W}_2^{22}$. Необходимо отметить, что для восстановления потенциальной части $\Phi^{00} + \Phi^{01} + \Phi^{02}$ поля $\mathbf{w}$ достаточно значений трех операторов $\{\mathcal{R}^{00}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{00}\mathbf{w}, \mathcal{W}_2^{00}\mathbf{w}\}$, которые присутствуют в наборе данных Задач 1 и 3. В то время как, соленоидальная часть $\Phi^{11} + \Phi^{12} + \Phi^{22}$ поля $\mathbf{w}$ восстанавливается по значениям $\mathcal{R}^{11}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{22}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{22}\mathbf{w}$ (Задачи 1, 2, 4, 5). Таким образом, данные Задачи 1 таковы, что потенциальная часть $\Phi^{00} + \Phi^{01} + \Phi^{02}$ и соленоидальная часть $\Phi^{11} + \Phi^{12} + \Phi^{22}$ поля $\mathbf{w}$ восстанавливаются по непересекающимся наборам данных $\{\mathcal{R}^{00}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{00}\mathbf{w}, \mathcal{W}_2^{00}\mathbf{w}\}$ и $\{\mathcal{R}^{11}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{22}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{22}\mathbf{w}\}$, соответственно.

В наборе данных Задачи 5 присутствует только одно нормальное преобразование Радона $\mathcal{R}^{00}$. Поэтому, для восстановления части $\Phi^{01} + \Phi^{02} + \Phi^{11} + \Phi^{12} + \Phi^{22}$ поля $\mathbf{w}$ набор данных можно ограничить значениями только продольных преобразований Радона (весовых и безвесовых) $\{\mathcal{R}^{11}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{22}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{11}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{22}\mathbf{w}, \mathcal{W}_2^{22}\mathbf{w}\}$.

Для решения Задач 1–6 можно использовать, например, формулу обращения (4). Продемонстрируем этот подход на примере Задачи 1.

Задача 1. Пусть даны значения шести операторов $\mathcal{R}^{00}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{11}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{22}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{00}\mathbf{w}, \mathcal{W}_2^{00}\mathbf{w}$ и $\mathcal{W}_1^{22}\mathbf{w}$. По этим данным необходимо восстановить симметричное 2-тензорное поле $\mathbf{w} \in \mathcal{S}(S^2)$.

Решение. Применяя формулу обращения (4) и используя равенства (7), (23), (25) и (28), получаем формулу для восстановления компонент

$$w_{ij} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} (g_{ij})''_{ss}(s, \xi) \Big|_{s=(\mathbf{x}, \xi)} d\xi$$

поля $\mathbf{w}$, где

$$\begin{aligned} g_{ij} = & \xi_i \xi_j \mathcal{R}^{00} \mathbf{w} + \frac{1}{2 \sin \beta} (e_i^1 \xi_j + e_j^1 \xi_i) (\sin \beta (\mathcal{W}_1^{00} \mathbf{w})'_s - (\mathcal{R}^{00} \mathbf{w})'_\alpha) \\ & + \frac{1}{2} (e_i^2 \xi_j + e_j^2 \xi_i) ((\mathcal{W}_2^{00} \mathbf{w})'_s + (\mathcal{R}^{00} \mathbf{w})'_\beta) + e_i^1 e_j^1 \mathcal{R}^{11} \mathbf{w} \\ & + \frac{1}{2 \cos \beta} (e_i^1 e_j^2 + e_j^1 e_i^2) (\sin \beta (\mathcal{W}_1^{22} \mathbf{w})'_s - (\mathcal{R}^{22} \mathbf{w})'_\alpha) + e_i^2 e_j^2 \mathcal{R}^{22} \mathbf{w}. \end{aligned}$$

§ 4. Заключение

В работе исследованы свойства весовых преобразований Радона 3D симметричных тензорных полей ранга 2. Установлены связи весовых преобразований Радона тензорных полей и преобразования Радона их потенциалов. Описаны ядра и образы весовых преобразований Радона 2-тензорных полей. Рассмотрены варианты постановок задач восстановления 3D симметричных тензорных полей ранга 2 по значениям совместно заданных нормального, продольных и весовых преобразований Радона, получены формулы обращения. Установленные связи между весовыми преобразованиями Радона симметричных 2-тензорных полей и преобразованием Радона их потенциалов могут быть основой для разработки новых конструктивных методов и алгоритмов решения задач тензорной томографии.

Список литературы

1. Natterer F. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Chichester: Wiley, 1986.
2. Helgason S. *The Radon Transform (Progress in Mathematics, 5)*. Springer, 1999.
3. Louis A. K. Uncertainty, ghosts, and resolution in Radon problems // *The Radon Transform: The First 100 Years and Beyond* / Eds. R. Ramlau and O. Scherzer. Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. P. 169–188.
4. Schuster T. 20 years of imaging in vector field tomography: a review // *Mathematical Methods in Biomedical Imaging and Intensity-Modulated Dairiation Therapy* / Eds. Y. Censor, M. Jiang and A. K. Louis, Series: Publications of the Scuola Normale Superiore, CRM Series, V. 7, Basel: Birkhäuser, 2008. P. 389–424.

5. Sharafutdinov V. A. *Integral Geometry of Tensor Fields*. Utrecht: VSP, 1994.
6. Sparr G., Strahlen K., Lindstrom K., Persson H. W. Doppler tomography for vector fields // *Inverse Probl.* 1995. V. 11, N 5. P. 1051–1061.
7. Derevtsov E. Yu., Svetov I. E. Tomography of tensor fields in the plain // *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* 2015. V. 3, N 2. P. 25–69.
8. Louis A. K. Inversion formulae for ray transforms in vector and tensor tomography // *Inverse Probl.* 2022. V. 38, N 6. 065008 (14 pages).
9. Ilmavirta J., Monkkonen K., Railo J. On mixed and transverse ray transforms on orientable surfaces // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2023. V. 31, N 1. P. 43–63.
10. Krishnan V. P., Manna R., Sahoo S. K., Sharafutdinov V. A. Momentum ray transforms // *Inverse Probl. Imaging.* 2019. V. 13, N 3. P. 679–701.
11. Mishra R. K. Full reconstruction of a vector field from restricted Doppler and first integral moment transforms in $\mathbb{R}^n$ // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2020. V. 28, N 2. P. 173–184.
12. Mishra R. K., Sahoo S. K. Injectivity and range description of first $(k + 1)$ integral moment transforms over m -tensor fields in $\mathbb{R}^n$ // *SIAM J. Math. Anal.* 2021. V. 53, N 1. P. 253–278.
13. Деревцов Е. Ю. Лучевые преобразования моментов планарных тензорных полей // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2023. Т. 26, № 3. С. 26–41.
14. Denisiuk A. Iterative inversion of the tensor momentum x-ray transform // *Inverse Probl.* 2023. V. 39, N 10. 105002 (15 pages).
15. Omogbhe D., Sadiq S. K. On the X-ray transform of planar symmetric tensors // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2024. V. 32, N 3. P. 431–452.
16. Светов И. Е., Деревцов Е. Ю., Мальцева С. В., Полякова А. П. Численная реконструкция двумерного векторного поля по лучевым преобразованиям его моментов // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2024. Т. 27, № 4. С. 113–129.
17. Fujiwara H., Omogbhe D., Sadiq K., Tamasan A. Inversion of the attenuated momenta ray transform of planar symmetric tensors // *Inverse Probl.* 2024. V. 40, N 7. 075004 (33 pages).

18. Svetov I.E., Polyakova A.P., Maltseva S.V. Reconstruction of 2D symmetric 2-tensor field by momentum ray transforms // *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* 2025. V. 13, N 2. P. 90–104.
19. Prince J. L. Tomographic reconstruction of 3-d vector fields using inner product probes // *IEEE Trans. Image Process.* 1994. V. 3, N 2. P. 216–219.
20. Prince J. L. Convolution backprojection formulas for 3-D vector tomography with application to MRI // *IEEE Trans. Image Process.* 1996. V. 5, N 10. P. 1462–1472.
21. Gullberg G. T., Ghosh Roy D. N., Zeng G. L., Alexander A. L., Parker D. L. Tensor tomography // *IEEE Nucl. Sci.* 1999. V. 46, N 4. P. 991–1000.
22. Gullberg G. T., Defrise M., Panin V. Y., Zeng G. L. Efficient cardiac diffusion tensor MRI by three-dimensional reconstruction of solenoidal tensor fields // *Magn. Reson. Imag.* 2001. V. 19, N 2. P. 230–256.
23. Panin V. Y., Zeng G. L., Defrise M., Gullberg G. T. Diffusion tensor MR imaging of principal directions: A tensor tomography approach // *Phys. Med. Biol.* 2002. V. 47, N 15. P. 2737–2757.
24. Svetov I. E., Polyakova A. P. Inversion of generalized Radon transforms acting on 3D vector and symmetric tensor fields // *Inverse Probl.* 2024. V. 40, N 1. 015009 (38 pages).
25. Louis A. K. A unified approach to inversion formulae for vector and tensor ray and Radon transforms and the Natterer inequality // *Inverse Probl.* 2024. V. 40, N 8. 085007 (17 pages).
26. Kunyansky L. A mathematical model and inversion procedure for magneto-acousto-electric tomography // *Inverse Probl.* 2012. V. 28, N 3. 035002 (21 pages).
27. Ammari H., Grasland-Mongrain P., Millien P., Seppecher L., Seo J.-K. A mathematical and numerical framework for ultrasonically-induced Lorentz force electrical impedance tomography // *J. Math. Pures Appl.* 2015. V. 103, N 6. P. 1390–1409.
28. Kunyansky L., McDugald E., Shearer B. Weighted Radon transforms of vector fields, with applications to magnetoacoustoelectric tomography // *Inverse Probl.* 2023. V. 39, N 6. 065014 (25 pages).

29. Светов И. Е., Полякова А. П. Восстановление трехмерных векторных полей по значениям нормального, продольных и весовых преобразований Радона // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2023. Т. 26, № 4. С. 125–142.
30. Светов И. Е., Полякова А. П. Разложение симметричных тензорных полей в $\mathbb{R}^3$. // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2023. Т. 26, № 1. С. 161–178.
31. Weyl H. The method of orthogonal projection in potential theory // *Duke Math. J.* 1940. V. 7, N 1. P. 411–444.
32. Deans S. *The Radon Transform and Some of its Applications*. New York: Wiley, 1983.

References

1. Natterer F. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Chichester: Wiley, 1986.
2. Helgason S. *The Radon Transform (Progress in Mathematics, 5)*. Springer, 1999.
3. Louis A. K. Uncertainty, ghosts, and resolution in Radon problems // *The Radon Transform: The First 100 Years and Beyond* / Eds. R. Ramlau and O. Scherzer. Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. P. 169–188.
4. Schuster T. 20 years of imaging in vector field tomography: a review // *Mathematical Methods in Biomedical Imaging and Intensity-Modulated Dairiation Therapy* / Eds. Y. Censor, M. Jiang and A. K. Louis, Series: Publications of the Scuola Normale Superiore, CRM Series, V. 7, Basel: Birkhäuser, 2008. P. 389–424.
5. Sharafutdinov V. A. *Integral Geometry of Tensor Fields*. Utrecht: VSP, 1994.
6. Sparr G., Strahlen K., Lindstrom K., Persson H. W. Doppler tomography for vector fields // *Inverse Probl.* 1995. V. 11, N 5. P. 1051–1061.
7. Derevtsov E. Yu., Svetov I. E. Tomography of tensor fields in the plain // *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* 2015. V. 3, N 2. P. 25–69.

8. Louis A. K. Inversion formulae for ray transforms in vector and tensor tomography // *Inverse Probl.* 2022. V. 38, N 6. 065008 (14 pages).
9. Ilmavirta J., Monkkonen K., Railo J. On mixed and transverse ray transforms on orientable surfaces // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2023. V. 31, N 1. P. 43–63.
10. Krishnan V. P., Manna R., Sahoo S. K., Sharafutdinov V. A. Momentum ray transforms // *Inverse Probl. Imaging.* 2019. V. 13, N 3. P. 679–701.
11. Mishra R. K. Full reconstruction of a vector field from restricted Doppler and first integral moment transforms in $\mathbb{R}^n$ // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2020. V. 28, N 2. P. 173–184.
12. Mishra R. K., Sahoo S. K. Injectivity and range description of first $(k + 1)$ integral moment transforms over m -tensor fields in $\mathbb{R}^n$ // *SIAM J. Math. Anal.* 2021. V. 53, N 1. P. 253–278.
13. Derevtsov E. Yu. Ray Transforms of the Moments of Planar Tensor Fields // *J. Appl. Ind. Math.* 2023. V. 17, N 3. P. 521–534.
14. Denisiuk A. Iterative inversion of the tensor momentum x-ray transform // *Inverse Probl.* 2023. V. 39, N 10. 105002 (15 pages).
15. Omogbhe D., Sadiq S. K. On the X-ray transform of planar symmetric tensors // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2024. V. 32, N 3. P. 431–452.
16. Svetov I. E., Derevtsov E. Yu., Maltseva S. V., Polyakova A. P. Numerical Reconstruction of a Two-Dimensional Vector Field from its Momentum Ray Transforms // *J. Appl. Ind. Math.* 2024. V. 18, N 4. P. 861–875.
17. Fujiwara H., Omogbhe D., Sadiq K., Tamasan A. Inversion of the attenuated momenta ray transform of planar symmetric tensors // *Inverse Probl.* 2024. V. 40, N 7. 075004 (33 pages).
18. Svetov I. E., Polyakova A. P., Maltseva S. V. Reconstruction of 2D symmetric 2-tensor field by momentum ray transforms // *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* 2025. V. 13, N 2. P. 90–104.
19. Prince J. L. Tomographic reconstruction of 3-d vector fields using inner product probes // *IEEE Trans. Image Process.* 1994. V. 3, N 2. P. 216–219.

20. Prince J. L. Convolution backprojection formulas for 3-D vector tomography with application to MRI // *IEEE Trans. Image Process.* 1996. V. 5, N 10. P. 1462–1472.
21. Gullberg G. T., Ghosh Roy D. N., Zeng G. L., Alexander A. L., Parker D. L. Tensor tomography // *IEEE Nucl. Sci.* 1999. V. 46, N 4. P. 991–1000.
22. Gullberg G. T., Defrise M., Panin V. Y., Zeng G. L. Efficient cardiac diffusion tensor MRI by three-dimensional reconstruction of solenoidal tensor fields // *Magn. Reson. Imag.* 2001. V. 19, N 2. P. 230–256.
23. Panin V. Y., Zeng G. L., Defrise M., Gullberg G. T. Diffusion tensor MR imaging of principal directions: A tensor tomography approach // *Phys. Med. Biol.* 2002. V. 47, N 15. P. 2737–2757.
24. Svetov I. E., Polyakova A. P. Inversion of generalized Radon transforms acting on 3D vector and symmetric tensor fields // *Inverse Probl.* 2024. V. 40, N 1. 015009 (38 pages).
25. Louis A. K. A unified approach to inversion formulae for vector and tensor ray and Radon transforms and the Natterer inequality // *Inverse Probl.* 2024. V. 40, N 8. 085007 (17 pages).
26. Kunyansky L. A mathematical model and inversion procedure for magneto-acousto-electric tomography // *Inverse Probl.* 2012. V. 28, N 3. 035002 (21 pages).
27. Ammari H., Grasland-Mongrain P., Millien P., Seppecher L., Seo J.-K. A mathematical and numerical framework for ultrasonically-induced Lorentz force electrical impedance tomography // *J. Math. Pures Appl.* 2015. V. 103, N 6. P. 1390–1409.
28. Kunyansky L., McDugald E., Shearer B. Weighted Radon transforms of vector fields, with applications to magnetoacoustoelectric tomography // *Inverse Probl.* 2023. V. 39, N 6. 065014 (25 pages).
29. Svetov I. E., Polyakova A. P. Reconstruction of Three-Dimensional Vector Fields Based on Values of Normal, Longitudinal, and Weighted Radon Transforms // *J. Appl. Ind. Math.* 2023. V. 17, N 4. P. 842–858.
30. Svetov I. E., Polyakova A. P. Decomposition of Symmetric Tensor Fields in $\mathbb{R}^3$ // *J. Appl. Ind. Math.* 2023. V. 17, N 1. P. 199–212.

31. Weyl H. The method of orthogonal projection in potential theory // *Duke Math. J.* 1940. V. 7, N 1. P. 411–444.
32. Deans S. *The Radon Transform and Some of its Applications*. New York: Wiley, 1983.

Информация об авторах

Иван Евгеньевич Светов, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
SPIN 5892-3956 AuthorID: 669428
Scopus Author ID 25032272800
WoS Author ID: J-4559-2018

Анна Петровна Полякова, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник
SPIN 5271-1188 AuthorID: 733183
Scopus Author ID 55639444300
WoS Author ID: J-4581-2018

Author Information

Ivan E. Svetov, Candidate of Mathematics, Senior Researcher
SPIN 5892-3956 AuthorID: 669428
Scopus Author ID 25032272800
WoS Author ID: J-4559-2018

Anna P. Polyakova, Candidate of Mathematics, Researcher
SPIN 5271-1188 AuthorID: 733183
Scopus Author ID 55639444300
WoS Author ID: J-4581-2018

*Статья поступила в редакцию 19.07.2025;
одобрена после рецензирования 06.10.2025; принята к публикации
05.11.2025*

*The article was submitted 19.07.2025;
approved after reviewing 06.10.2025; accepted for publication 05.11.2025*